9 principes à respecter
pour construire la représentation du nombre

R. Fareng, Inspecteur départemental de l'Éducation nationale et Mme Fareng Institutrice de Cours Préparatoire, Professeur de Mathématiques *(L'apprentissage du calcul avec les enfants de 4 à 7 ans 1966)*

Partir du concret

« On peut arriver à introduire dans la mémoire d'un enfant une certaine mécanique du calcul : suite des nombres, table d'addition, opérations simples, ceci sans support concret. Si l'on veut que cette mécanique ne soit pas de simple mémoire et s'accompagne d'un début très modeste de raisonnement, il est indispensable de l'appliquer à une manipulation effective d'objets, ou, tout au moins, à une représentation visible de choses. »

(Chatelet, Doyen de la Faculté des sciences de Paris)

« Il est un principe fondamental qui domine en pédagogie des débuts du calcul : avant toute acquisition abstraite l'enfant doit avoir une expérience concrète de la notion, une familiarité suffisante avec elle pour que la formulation verbale ne s'impose pas à lui de l'extérieur, mais qu'elle soit véritablement la traduction dans un langage plus précis et plus ordonné d'une réalité vécue, sentie par lui. Avant d'introduire le vocabulaire mathématique, les signes abstraits, l'éducateur devra s'assurer que l'opération concrète est parfaitement réalisée par l'élève et ne correspond pas à un simple automatisme. »

(Mialaret, Professeur de psychologie à la faculté de Caen)

Brunschvig : « L'abstraction mathématique est avant tout un mode d'activité. L'enfant apprend essentiellement l'ordre de manipulation : c'est une propriété de son action beaucoup plus qu'une propriété des cailloux qu'il découvre, c'est l'expérience sur l'action propre. »

Ne pas enliser l'enfant dans le concret.

Le nombre n'est pas tiré du concret comme en sont tirées les lois physiques. Il n'est pas une qualité, mais l'expression d'un rapport entre les objets. Plus : l'abstraction mathématique va en sens inverse de l'abstraction physique ..., cette dernière aboutit à ne retenir qu'une seule image pour des objets qualitativement identiques ; or la fusion mentale des images diverses dans une représentation unique entraînerait une confusion que l'abstraction mathématique a précisément pour but d'empêcher en attirant l'attention sur ce fait que ces objets sont plusieurs.

On est donc amené à rejeter le matériel trop chargé de concret qui détourne l'attention du nombre proprement dit au profit de détails émouvants ou pittoresques sans liens avec lui, à retenir au contraire un matériel ou apparaissent les rapports abstraits constituant les nombres, soit des collections d'éléments dépouillés, schématiques, identiques et réguliers (la figure idéale étant, dans ce sens, le cercle).

Éviter le comptage unité par unité.

La première façon de compter a consisté à faire correspondre successivement un certain nombre de doigts avec le même nombre d'objets, d'abord en les montrant, ensuite en les touchant. Le calcul digital — dont on n'est pas sûr qu'il a entièrement disparu des écoles — trouve là ses lointaines origines. L'enfant rejoint le primitif.

Mais ce moyen commode n'est que mécanique. Et compter, ni décompter, n'est pas calculer. Si, comme nous le verrons plus loin, le nombre est inséparable de l'idée de collection, ici, nous n'avons qu'une succession constamment rattachée à des données spatiales concrètes dont on ne peut s'évader. La notion acquise est uniquement ordinale.

Sans doute, cette façon empirique fait acquérir à force de répétitions la liaison entre le nom des nombres, l'écriture du chiffre, la position de ce nombre dans la suite des autres, mais elle gêne la représentation du nombre, l'opération mentale, en un mot, elle empêche l'enfant de penser, de calculer.

Ces inconvénients graves se retrouvent dans l'emploi de nombreux matériels. Le comptage unité par unité s'opère de la même manière quand on utilise les marrons, les bûchettes, surtout disposés de façon linéaire. Le même reproche peut être adressé au boulier et même aux jetons. Sans doute peut-on placer marrons et jetons sous forme de groupements numériques, mais l'intérêt de ces « constellations » disparaît en partie *si l'on place les éléments les uns après les autres.* La perception qui doit se faire à la fois du nombre, des parties, des relations entre ses parties et lui-même, est détruite par la manipulation unité par unité. *Une seule solution : présenter chaque nombre de façon indivise*.

Pour Tannery : « le nombre « collection » est un groupe d'unités décomposables en d'autres groupes, susceptible d'être formé de diverses manières par la réunion d'autres groupes ». Pour Bergson, « tout nombre est UN puisqu'on se le représente par une intuition simple de l'esprit et qu'on lui donne un nom, mais cette unité est celle d'une somme, elle embrasse une multiplicité de parties qu'on peut considérer isolément ». Si, pour cet auteur, toute idée claire du nombre implique une vision dans l'espace, pour Wallon, également : « l'attention saisit un bien plus grand nombre de points si ceux-ci, au lieu d'être en rangées linéaires, présentent des possibilités de groupements. » Ainsi sont justifiées les « figures numériques », « dispositif géométrique d'unités propres aux petits nombres ; chacun de ces nombres se présente alors sous une physionomie particulière qui en donne une perception instantanée sans qu'il soit besoin de compter ».

Les groupements numériques permettent la perception intuitive des décompositions et recompositions, et, en aidant à l'abstraction, leur mémorisation …

Les systèmes sont nombreux : système Beetz, pratiquement inconnu en France ; groupements à base 5 — celui de Freemann —, non systématiques (empruntés aux jeux de domino, aux dés), éclectiques non raisonnés (mêlant les figurations au hasard) ou systématiques (recherchant les meilleures « formes », Canac, par exemple) — groupement à base 4 (Lay) — système à base 2 (Herbinière Lebert).

Le matériel doit faire accéder l'enfant au stade des invariants.

C'est encore le psychologue Jean Piaget qui, dans ses ouvrages, a montré que, chez le petit enfant, *il n'y a pas conservation des ensembles.* Des expériences bien connues ont démontré que, jusqu'à un certain âge (7 ans), les simples transformations physiques d'une quantité constante entraînaient de la part de l'enfant des jugements d'inégalité. La même quantité d'eau est versée dans des récipients différents de forme : le jeune enfant affirme le changement de quantité. Il aura la même attitude s'il remplit deux de ces récipients avec le même nombre de perles (une à une avec chaque main).

Il est bien évident que l'enfant ne peut accéder à la notion de nombre tant qu'il n'a pas admis la conservation des équivalences (longueurs, distances, surfaces, volumes, espace), tant que sa pensée, ainsi que le dit Piaget, n'est pas parvenue à la « réversibilité ».

Ces stades, l'adulte ne peut aider à leur franchissement par la leçon, la parole, voire par la démonstration. L'enfant ne peut y arriver que seul, soit que la maturation de son système nerveux le permette, soit que l'action, les manipulations, lui fassent dissocier qualité et quantité.

Il est vain, donc, de vouloir faire calculer l'enfant tant que la notion d'invariance n'est pas acquise. Et il faut sans cesse fortifier cette notion extrêmement importante en mathématiques, tout au long de la scolarité. Déjà la distinction entre abstraction pratique et abstraction physique nous avait convaincu qu'il fallait rejeter la variété dans la disposition des unités concrètes ainsi que dans le choix de ces unités. Nous partageons le point de vue de Delaunay : « Certaines figures numériques doivent être fondamentales, privilégiées. » Un matériel *de base* permet seul, postérieurement, des variations. Mais chaque nombre lui-même doit rester constant, quelles que soient les décompositions mises en valeur. Le groupement numérique qui le représente sert de témoin. Que l'on examine par exemple comment les plaquettes Herbinière Lebert permettent l'étude du nombre 7 : la forme de ce dernier nombre est constante quand sa structure interne varie : il y a conservation absolue de sa totalité dans l'espace, quoique les relations de ses diverses parties soient sans cesse modifiées.

Il faut entraîner à l'analyse et à la synthèse.

Les instructions officielles, rappelons-le, précisent : « Pour avoir véritablement la notion d'un nombre, il faut pouvoir le reconnaître sous ses aspects divers, connaître son nom, sa figure, sa constitution ». Faire trouver que 7 = 6 + 1 = 5 +2 = 4 + 3 = 3 + 3 + 1 = 2 + 2 + 2 + 1, etc., c'est procéder à l'analyse et à la synthèse de la constitution du nombre.

C'est là un exercice difficile pour l'enfant, lequel procède par juxtaposition, par passage du singulier au singulier, par « transduction », suivant l'expression de Stern. Mais l'émergence des valeurs permanentes, des invariants, l'accès à la réversibilité permettent graduellement le va-et-vient de l'analyse à la synthèse, mouvement essentiel de la pensée mathématique, de la pensée rationnelle, cartésienne, dirions-nous.

Nous ne pensons pas qu'il soit nécessaire d'insister sur la nécessité d'un matériel entraînant, de par sa conception, à l'analyse et à la synthèse, et, répétons-le, sans le passage de l'unité à l'unité, mais par sommes, par groupes, par ensembles. Le simple examen des décompositions d'un nombre à partir des réglettes Cuisenaire, à partir des plaquettes Herbinière-Lebert fait comprendre comment il peut être répondu à cette exigence.

Cette démarche de l'esprit doit se retrouver dans toutes les disciplines. Mme l'Inspectrice générale Boscher a montré que l'apprentissage de la lecture avec la méthode à point de départ global favorisait l'initiation au calcul. Inversement, nous pourrions, démarquant ses paroles, dire : « Un enfant entraîné en calcul à la perception globale des nombres, à l'analyse spontanée de leurs éléments et au regroupement de ceux-ci... cet enfant, qui a ainsi découvert la mobilité des éléments des groupements numériques, n'est-il pas préparé par là-même à percevoir globalement, à décomposer, à recomposer des phrases et des mots ? »

Il faut donner une place privilégiée à la première dizaine.

On trouvera ci-après une leçon pratique sur la dizaine considérée comme unité d'ordre supérieur. Il convient de marquer l'importance de ce relai et, à cette occasion, de bien prendre conscience de l'importance du zéro. Celui-ci, on le sait, n'a été adopté en France, après bien des difficultés, qu'au XVI^{e} siècle. L'enfant doit comprendre ce que l'humanité a mis des millénaires à inventer : la numération de position sans laquelle ni science des nombres, ni science tout court n'auraient existé.

Il est donc souhaitable d'utiliser un matériel :

1° Dont les dizaines peuvent se compter aussi aisément que les unités simples.

2° Qui montre le rôle et la nécessité du zéro :

— pour marquer l'absence d'un chiffre d'un certain ordre ;

— comme opérateur (c'est-à-dire décuplant immédiatement la valeur d'un nombre quand il est écrit à la droite de celui-ci).

3° Qui fait apparaître la distinction essentielle de la numération, la différence entre la valeur absolue et relative d'un chiffre. Ainsi un enfant de C.P. doit savoir que dans 37, par exemple, il y a 3 dizaines et 7 unités simples, que le chiffre des dizaines est 3, celui des unités simples 7, que 3 représente 30 unités simples, que 37 est une collection de 37 unités simples. Si on demande à un élève « combien y a-t-il d'unités dans 37 ? » et qu'il réponde « 7 », il n'a pas compris.

4° Faisant apercevoir le passage d'une dizaine à l'autre.

5° Montrant l'analyse de formation des dizaines successives[1].

Il faut mettre en valeur la deuxième dizaine.

Pour M. Mialaret, l'étude de celle-ci forme « le pivot même et le stade essentiel de l'initiation au calcul ».

En effet, l'étude des nombres de 11 à 19 offre encore l'occasion de réviser longuement les nombres de la première dizaine, d'en assurer la connaissance et le maniement ; elle est la base des tables d'addition, instrument essentiel par la suite ; enfin, et peut-être surtout, on entre décidément dans le domaine des nombres trop grands pour que les collections d'objets correspondants puissent être vraiment imaginées ou même distinctement perçues.

Il faut donner la notion d'opérations et faire acquérir le mécanisme de celles-ci.

[1] Ces divers points sont particulièrement illustrés dans la notice accompagnant le matériel Herbinière Lebert, ainsi que dans l'opuscule *Pédagogie des début du calcul* par Mialaret, éd. Nathan.

Pour cela le matériel doit permettre toutes les décompositions et compositions démontrant ainsi la commutativité, l'associativité, le principe des opérations inverses — et aussi donnant le sens des opérations : additions (réunir et ajouter), soustractions (recherche du reste, du complément, de la différence entre deux quantités), multiplication (substitution de l'addition de nombres égaux), division (calcul de parts, c'est-à-dire répartition, et de la valeur d'une part, c'est-à-dire partage).

Peu de matériels sont utilisables pour l'acquisition du mécanisme. Or celui-ci doit être tel que la disposition écrite, la démarche pratique, le raisonnement, soient le décalque parfait de la manipulation. L'opération effectuée concrètement doit pouvoir se reproduire fidèlement par écrit. Un mécanisme monté verbalement et par imitation n'aura jamais la même valeur que celui auquel on accède à travers une activité d'abord manuelle. Encore faut-il que celle-ci puisse être transcrite rigoureusement, ce qui est rarement le cas dans la majorité des matériels (et qui est impossible, par exemple, avec les « dominos »).

Enfin, il faut que ce soit l'enfant lui-même qui « découvre ».

Pour Alain : « Il n'est de progrès pour nul écolier au monde, ni en ce qu'il entend, ni en ce qu'il voit, mais seulement en ce qu'il fait. » Piaget le redit, sous une autre forme : « Un enfant a infiniment à gagner à faire pendant trois jours une expérience qu'il fait lui-même, plutôt que de passer un quart d'heure à la lui montrer. »

Si donc le nombre ne s'acquiert qu'à partir de manipulations concrètes, menées le plus librement possible par chacun, il est indispensable que tous les élèves aient leur matériel individuel (il faut donc que celui-ci soit simple, peu encombrant, léger, maniable, insonore, lavable). Le maître doit pouvoir, de loin et rapidement, contrôler l'emploi qui en est fait, mais, surtout, ce matériel doit être auto-correctif.

Ainsi l'enfant pourra travailler seul, soit parce que, dans une classe à tous cours, le maître s'occupe pendant ce temps des autres élèves, soit parce que, dans un cours homogène, on laisse, en bonne pédagogie, les élèves travailler à leur guise pendant une phase d'activités libres.

Une leçon de calcul, quoique limitée dans son objet et son déroulement, résumera les principes généraux de l'initiation au calcul. Il conviendra de partir du concret pour s'élever à l'abstrait et revenir au concret ; de partir d'une vue globale du nombre, pour, procédant par analyse et synthèse, accéder à une totalité construite ; de partir de l'activité personnelle de chaque enfant, d'abord libre, pour la diriger éventuellement ou pour la contrôler.

On ne fournira pas des résultats mais on mettra l'enfant en situation, sinon de trouver, du moins de chercher ; on ne lui donnera pas un savoir mais on lui permettra d'inventer sa méthode.