

Voici le cours sur la règle de trois tel qu'il était exposé dans le livre d'arithmétique du Cours Moyen de Croisille, en 1924.

LA RÈGLE DE TROIS SIMPLE ET DIRECTE

405. Problème. - Sur un champ de 12 ares, planté d'asperges, un cultivateur emploie 15 kg de nitrate de soude. Quel poids de nitrate emploiera-t-il sur un autre champ de 38 ares ?

Sur 12 ares le cultivateur épand 15 kg de nitrate,

Sur 1 are il en épand 12 fois moins, soit : $15\text{kg} : 12$ ou $15\text{ kg}/12$

Sur 38 ares il en épand 38 fois plus que sur 1 are,

soit $(15\text{ kg}/12) \times 38 = (15\text{ kg} \times 38)/12 = \mathbf{47,500\text{ kg}}$.

Nous avons effectué d'abord la multiplication, puis la division.

406. Ce problème, qui s'applique à des grandeurs proportionnelles et qui consiste, trois nombres étant donnés, à en chercher un quatrième, est une **règle de trois**.

407. Cette règle de trois est dite simple parce qu'elles ne contiennent que deux espèces de grandeurs ; on la dit aussi directe parce que ces grandeurs sont directement proportionnelles.

408. Remarque. - On n'effectue les opérations qu'après avoir simplifié les expressions.

Il préconise le retour à l'unité, dans la phrase : "Sur 1 are il en épand 12 fois moins, soit : $15\text{kg} : 12$ ou $15\text{ kg}/12$ ".

Chaque ligne du raisonnement explicite les grandeurs physiques en jeu, l'opération faite, les unités employées.

Il est conseillé d'effectuer d'abord la multiplication, car la longue pratique du calcul mental et des opérations sur les fractions conduit tout naturellement à cet ordre, pour pouvoir simplifier si possible.

Si nous posons la division $(15\text{ kg} \times 38)/12$ sous forme de fraction à simplifier, nous obtenons :

$$\frac{15 \cdot 38}{12} = \frac{\cancel{3} \cdot 5 \cdot \cancel{2} \cdot 19}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 2} = \frac{95}{2} = 47,5$$

Les simplifications se faisant en calcul mental, la seule opération à poser à la rigueur est la dernière division par 2.

Voyons maintenant le même problème traité en dressant un tableau de proportionnalité.

Pour comprendre de quoi il s'agit, il convient de mettre des titres de lignes indiquant la nature des grandeurs physiques en jeu, avec les unités ; en écrivant une colonne par situation.

	situation de l'énoncé	situation cherchée	
			$\longrightarrow \times 38/12$
Surface du champ, en ares	12	38	
Poids du nitrate, en kg	15	47,5	$\downarrow \times 15/12$

Nous avons écrit dans la marge haute et dans la marge droite les deux opérateurs linéaires, ou de proportionnalité que l'on peut considérer, et qui sont de natures mathématiques différentes. Si l'on veut appliquer convenablement la méthode du tableau de proportionnalité, et la bien expliquer, il est bon d'en avoir conscience.

a) $38/12$: pour passer de la colonne de gauche à la colonne de droite, soit pour transformer 12 ares en 38 ares, on multiplie par $38/12$. C'est un opérateur sans dimension car on divise des ares par des ares. Puisqu'il est sans dimension, en opérant sur la deuxième ligne il ne changera pas la nature ni l'unité de la grandeur figurant dans la case à gauche, soit un poids de nitrate en kg. On fait donc ici en toute rigueur $15 \times (38/12)$.

b) $15/12$: pour passer de la première ligne à la deuxième, soit pour transformer 12 ares de champ en 15 kg de nitrate, on multiplie formellement par $15/12$, mais on a changé de nature d'objet physique. L'opérateur a cette fois une dimension, quotient, kg/are. Si nous faisons agir cet opérateur sur le nombre 38 ou plus précisément sur la grandeur physique 38 ares, nous faisons $38 \times (15/12)$ et d'autre part

$$\text{are} \times \frac{\text{kg}}{\text{are}} = \text{kg}$$

Nous nous y retrouvons, certes, mais c'est théoriquement un peu plus compliqué.

On pourra dire que grâce à la commutativité de la multiplication, $15 \times 38 = 38 \times 15$, mais on n'a pas fait la même transformation.

Il nous semble que cette méthode du tableau de proportionnalité, si elle est bien détaillée en sachant ce que l'on fait, n'est ni plus facile ni plus automatique que la règle de trois, (ni moins, d'ailleurs) et il n'y a nul miracle à en attendre pour une meilleure compréhension par les élèves. Ce que faisaient déjà remarquer les didacticiens Gérard Vergnaud et Janine Rogalski, voici environ trente ans, et que continue de nous montrer l'expérience ordinaire d'enseignement.

Considérons maintenant un problème plus compliqué, trouvé dans les annales de certificat d'études.

Les olives donnent en moyenne 12% de leur poids d'huile. Un hectolitre d'olives pèse 45 kg, et 1 litre d'huile pèse 912 grammes. Pour obtenir 800 litres d'huile, combien faut-il d'hectolitres d'olives ? (CM, Châtelet, 1934).

Quelle que soit la méthode que l'on souhaitera adopter, le premier travail est la mise en ordre chronologique des données de l'énoncé, dans l'ordre du travail de transformation des olives en

huile. Il s'avère ainsi que la première phrase est : "Un hectolitre d'olives pèse 45 kg" (rapport volume-poids) ; puis "Les olives donnent en moyenne 12% de leur poids d'huile" (rapport de poids); puis " 1 litre d'huile pèse 912 grammes" (masse volumique, donc rapport entre masse et volume) et enfin "Pour obtenir 800 litres d'huile", le volume d'huile souhaité étant le produit final, dans l'ordre de fabrication, alors que la question posée porte sur le produit initial, le volume d'olives.

Ici, contrairement au problème du nitrate où la question suit l'ordre chronologique, il faut dans le raisonnement remonter dans le temps, dans l'ordre inverse de la fabrication de l'huile.

Voici comment un élève de 1930 habitué à la règle de trois pouvait traiter ce problème :

Il faudra écrire plusieurs règles de trois successives.

a) 1 litre d'huile pèse 0,912 kg,

donc 800 litres pèsent $800 \times 0,912 \text{ kg} = 729,6 \text{ kg}$

b) 12 kg d'huile proviennent de 100 kg d'olives,

1 kg d'huile provient de $100/12$ de kg d'olives,

donc 729,6 kg d'huile proviennent de $729,6 \times 100/12$ de kg d'olives, soit 6080 kg d'olives.

c) 45 kg d'olives occupent un volume de 1 hectolitre,

donc 1 kg occupe $1/45$ d'hectolitre,

6080 kg occupent $6080 \times 1/45 = 135,111$ hectolitres d'olives.

Conclusion : si on veut obtenir 800 litres d'huile, il faut 135,111 hectolitres d'olives.

La résolution par les tableaux de proportionnalité ne diffère en rien dans son principe de la résolution précédente, et pour cause, c'est le même raisonnement.

a)

Volume d'huile, en litres	1	800	$\downarrow \times 0,912$
Poids d'huile, en kg	0,912	729,600	
	$\longrightarrow \times 800$		

b)

Poids d'huile, en kg	12	729,6	$\downarrow \times 100/12$
Poids d'olives, en kg	100	6080	
	$\longrightarrow \times 729,6/12$		

c)

Poids d'olives, en kg	45	6080	$\downarrow \times 1/45$
Volume d'olives, en hectolitres	1	135,111	
	$\longrightarrow \times 6080/45$		

Conclusion : si on veut obtenir 800 litres d'huile, il faut 135,111 hectolitres d'olives.

L'explicitation détaillée des grandeurs en jeu et des opérateurs (écrits en vert) ne se fait pas par une expression rhétorique, contrairement à la rédaction de la règle de trois. Mais elle demande une démarche de pensée qui est en principe la même, mais en réalité plus compliquée, l'obligation de prendre conscience de la nature différente des deux opérateurs, et de la grandeur quotient des opérateurs dimensionnels, $1/45$ par exemple qui transforme des kilos en hectolitres. Des élèves de sixième nous l'avaient objecté.

Pour le nombre de lignes d'écriture de l'un et l'autre types de solutions, comparons :

règle de trois : 9 lignes ;

tableaux de proportionnalité : 10 lignes.

On peut, mais avec beaucoup de métier, que n'ont pas les élèves, traiter le problème avec une extrême concision en un seul tableau :

Volume d'huile, en l			1	800	$\downarrow \times 0,912 \times (100/12) \times (1/45)$
Poids d'huile, en kg		12	0,912		
Poids d'olives, en kg	45	100			
Volume d'olives, en hl	1			135,111	

Nous retrouvons ici les opérateurs successifs qui vont agir sur le nombre 800 :

$0,912/1$ pour la masse volumique de l'huile, $100/12$ pour le rapport entre le poids d'olives et celui de l'huile, et $1/45$ pour le rapport entre le volume d'olives et leur poids.

Ces opérateurs, multipliés puisqu'ils expriment des applications linéaires qui se composent entre elles, et s'appliquant au volume final, fournit le résultat cherché 135,111.

Rapide et concis, mais pour l'obtenir, il fallait trouver le raisonnement en ordre et complet.

On peut estimer raisonnablement que l'élaboration d'un tel tableau unique dans sa concision demande une réflexion et un métier inaccessibles à des élèves de l'école primaire.

De quelque façon que l'on opère, le travail le plus important est la mise en ordre et la mise au clair des opérateurs des transformations successives en remontant dans le temps.

Et nous estimons qu'il est le même dans les deux méthodes. Quant à la longueur d'écriture (argument prisé des élèves), nous avons vu qu'elle est à l'avantage de la règle de trois.

On peut donc se demander pourquoi la colère des didacticiens et pédagogistes se déchaîne contre cette fameuse règle de trois.

Une première supposition, peut-être rapide : ils ne savent tout simplement pas la faire ... trop jeunes pour avoir eu à la pratiquer comme élèves, et trop impatient, trop peu curieux pour en chercher des exemples dans les ouvrages anciens, qui pourtant abondent dans les brocantes.

Soyons un peu moins médisants, et tentons un rapprochement avec un autre domaine des mathématiques lui aussi disparu de fait : la géométrie euclidienne classique, celle qui pour

l'étude des figures demande l'invention¹ d'une démonstration écrite. Pour deux raisons : la nécessité de l'expression rhétorique du raisonnement, qu'il faut écrire en un français ordonné selon des règles d'expression précises. Et la nature même de ce raisonnement, qui dans le cas minimum est le syllogisme d'Aristote, composé d'une prémisse majeure, d'une mineure, et de la conclusion. Les trois phrases de la règle de trois (sur 12 ares ... sur 1 are ... sur 38 ares ...) ne sont pas superposables avec les trois parties du syllogisme, certes, nous ne ferons pas une telle assimilation naïve. Mais la règle de trois présente le premier modèle de ce qui sera la construction logique type.

Loin d'être un mécanisme comme le déclarent les didacticiens actuels (dont on se demande s'il leur est arrivé de faire des mathématiques et de réfléchir à leur enseignement ...), un tel raisonnement est à réinventer à chaque fois, et à écrire en français correct et normé. D'où la difficulté de son enseignement, mais aussi sa fécondité, puisque c'est un des lieux où s'exerce à la fois le raisonnement mathématique et la qualité et la rigueur de l'expression française, c'est un des meilleurs exercices de formation à la liberté de pensée.

Nous ne nions pas que c'est difficile, c'est une banalité de le dire, vingt-cinq siècles de tradition mathématique et philosophique le répètent, jusqu'aux didacticiens sérieux de la première génération, Vergnaud et Rogalski, qui savaient qu'il n'y a pas de recette miracle, qu'il n'y en a jamais quand il s'agit d'élaborer un raisonnement ; mais les actuels semblent ne pas avoir lu leurs travaux ...

Si les actuels didacticiens sont opposés à la règle de trois, ce n'est pas parce qu'ils commettraient un contresens sur sa nature. Au fond, non. C'est au contraire parce qu'ils participent de toutes leurs forces à l'entreprise réactionnaire de destruction de la pensée et de tout ce qui permettait la lente et patiente élaboration de la rationalité et de la liberté de pensée chez nos élèves.

1 Les lecteurs pourront objecter que les livres de mathématiques actuels de collège présentent des problèmes de géométrie apparemment euclidienne. Mais il sera facile de vérifier que le cours ne comporte aucune démonstration de théorème (mot banni), et que les énoncés imposent les intermédiaires de résolution, c'est-à-dire que l'élève n'a rien à trouver, et est complètement ligoté. On ne fait pas là de mathématiques.